

Herleitung der Gleichung

Oliver Predelli, Braunschweig

Folgende Annahme: Die Thermik habe die Form einer „Blase“. Dabei komme es zu keinem Gasaustausch mit der Umgebung [Haf99, S. 12ff]. Sie sei leichter als die Umgebungsluft und steige ähnlich einem Gasballon vom Boden auf. Volumen und Form der Thermikblase seien während des Aufstiegs hinreichend konstant. Die Änderung der Steiggeschwindigkeit sei vernachlässigbar klein.

Auf die Thermikblase wirken Auftriebs-, Gewicht- und Widerstandskraft im Gleichgewicht:

$$F_A = F_G + F_W, \quad (1)$$

mit

$$F_A = \rho_{Lu} \cdot V_{Th} \cdot g, \quad F_G = \rho_{Th} \cdot V_{Th} \cdot g, \quad F_W = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot A_{Th} \cdot \rho_{Lu} \cdot w^2. \quad (2), (3), (4)$$

Durch Einsetzen, Umformen und Einführen des konstanten Parameters

$$A = \frac{2 \cdot g \cdot V_{Th}}{c_W \cdot A_{Th}} \quad (5)$$

erhält man die Gleichung für die Auftriebsgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{A \cdot \frac{\rho_{Lu} - \rho_{Th}}{\rho_{Lu}}}. \quad (6)$$

Die Auftriebsgeschwindigkeit w berechnet sich somit unmittelbar aus der Dichte der Umgebungsluft und der Dichte der Luft innerhalb der Thermikblase.

Nach [Hak16, S. 40] berechnet sich die Luftdichte ρ aus

$$\rho = \frac{p}{R_f \cdot T}, \quad (7)$$

dabei ist

$$R_f = \frac{R_t}{1 - \varphi \cdot p_d / p \cdot (1 - R_t / R_d)}, \quad (8)$$

mit $R_t = 287,05 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ als Gaskonstante der trockenen Luft und $R_d = 461 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ als Gaskonstante für Wasserdampf.

Gl. 8 wird mit

$$a = p_d / p \cdot (1 - R_t / R_d) \quad (9)$$

zusammengefasst zu

$$R_f = \frac{R_t}{1 - a \cdot \varphi}. \quad (10)$$

Hier erfolgt eine Vereinfachung der weiteren Rechnung, denn der Term p_d/p ist eigentlich temperatur- und höhenabhängig. Der durch Sättigungsdampfdruck und Atmosphärendruck

bestimmte Faktor a ist für Umgebungsluft und Thermik gleich, weil beide in ihrer jeweiligen Höhe eine annähernd gleiche Temperatur haben [Blu14, S. 10ff].

Einsetzen der Gl. 7 und Gl. 10 in Gl. 6 ergibt nach einigen Umformungen

$$w^2 = A \cdot \frac{\varphi_{Th} - \varphi_{Lu}}{B - \varphi_{Lu}} \quad (11)$$

mit $A = \frac{2 \cdot g \cdot V_{Th}}{c_w \cdot A_{Th}}$ und $B = \frac{1}{a}$.

Die Taupunkttemperatur τ berechnet sich aus der relativen Luftfeuchtigkeit φ und der Lufttemperatur ϑ gemäß [Int01] mit $K_2 = 22,46$ und $K_3 = 272,62$ °C:

$$\tau = K_3 \cdot \frac{\frac{K_2 \cdot \vartheta}{K_3 + \vartheta} + \ln \varphi}{\frac{K_2 \cdot K_3}{K_3 + \vartheta} - \ln \varphi} \quad (12)$$

Gl. 12 lässt sich nach φ umstellen:

$$\ln \varphi = \frac{K_2 \cdot K_3 \cdot (\tau - \vartheta)}{(K_3 + \vartheta) \cdot (K_3 + \tau)} \quad (13)$$

Einsetzen von Gl. 13 in Gl. 11, sowohl zur Berechnung der Dichte der Umgebungsluft, wie auch zur Berechnung der Dichte der Thermikblase, liefert die **Gleichung zur Berechnung der Thermikstärke**:

$$w = \sqrt{A \cdot \frac{e^{\frac{K_2 \cdot K_3 \cdot (\tau_{Th} - \vartheta_{Lu})}{(K_3 + \vartheta_{Lu}) \cdot (K_3 + \tau_{Th})}} - e^{\frac{K_2 \cdot K_3 \cdot (\tau_{Lu} - \vartheta_{Lu})}{(K_3 + \vartheta_{Lu}) \cdot (K_3 + \tau_{Lu})}}}{B - e^{\frac{K_2 \cdot K_3 \cdot (\tau_{Lu} - \vartheta_{Lu})}{(K_3 + \vartheta_{Lu}) \cdot (K_3 + \tau_{Lu})}}}} \quad (14)$$

Aufgrund des relativ hohen Wertes von $K_3 = 272,62$ °C lässt sich Gl. 13 unter Inkaufnahme eines gewissen Fehlers mit $(K_3 + \vartheta) \approx (K_3 + \tau) \approx K_3$ vereinfachen zu

$$\ln \varphi \approx \frac{K_2}{K_3} \cdot (\tau - \vartheta) \quad (15)$$

Daraus folgt mit den Werten für K_2 und K_3 aus Gl. 12:

$$\varphi \approx e^{\frac{K_2}{K_3} \cdot (\tau - \vartheta)} \approx 1,1^{(\tau - \vartheta) / ^\circ C} \quad (16)$$

Umstellen des negativen Terms $(\tau - \vartheta)$ auf ein positives $(\vartheta - \tau)$ und einsetzen von Gl. 16 in Gl. 11 ergibt:

$$w^2 = A \cdot \frac{1,1^{(\tau_{Th} - \vartheta_{Lu}) / ^\circ C} - 1,1^{(\tau_{Lu} - \vartheta_{Lu}) / ^\circ C}}{B - 1,1^{(\tau_{Lu} - \vartheta_{Lu}) / ^\circ C}} \quad (16)$$

Die Division von Zähler und Nenner durch $1,1^{(\tau_{Lu} - \vartheta_{Lu}) / ^\circ C}$ und Herauskürzen von B unter Berücksichtigung von $1/B \ll 1$, ergibt die **vereinfachte Thermik-Formel**:

$$w \approx K \cdot \sqrt{\frac{1,1^{(\tau_{Th} - \tau_{Lu}) / ^\circ C} - 1}{1,1^{(\vartheta_{Lu} - \tau_{Lu}) / ^\circ C}}} \quad (17)$$

$$\text{mit } K = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot g \cdot V_{Th}}{c_W \cdot A_{Th}}}$$

Formelzeichen

F_A	Auftriebskraft der Thermikblase in N
F_G	Gewichtskraft der Thermikblase in N
F_W	gegen die Aufstiegsbewegung der Thermikblase wirkende Widerstandskraft in N
ρ_{Lu}	Dichte der Umgebungsluft in kg/m ³
ρ_{Th}	Dichte der Luft in der Thermikblase in kg/m ³
g	Erdbeschleunigung in m/s ²
V_{Th}	Volumen der Thermikblase in m ³
A_{Th}	Für die Widerstandskraft relevante Querschnittsfläche der Thermikblase in m ²
c_W	Widerstandsbeiwert der aufsteigenden Thermikblase
w	Aufstiegsgeschwindigkeit der Thermikblase in m/s
p	Umgebungsdruck in Pascal
p_d	Sättigungsdampfdruck in Pascal
T	Temperatur in Kelvin
ϑ_{Lu}	Temperatur der Umgebungsluft in °C
R_f	Gaskonstante für feuchte Luft in J/kg·K
φ_{Lu}	relative Luftfeuchtigkeit der Umgebungsluft (z.B. 0,8 für 80%)
φ_{Th}	relative Luftfeuchtigkeit in der Thermikblase (z.B. 0,8 für 80%)
τ_{Lu}	Taupunkttemperatur der Umgebungsluft in °C
τ_{Th}	Taupunkttemperatur der Thermikblase in °C
w^*	Aufwindgeschwindigkeit für einen bestimmten Gelände-Abschnitt in m/s
T_0	tägliche Durchschnittstemperatur in K
Q_S	Energiezustrom der Sonne in W/m ²
D	Höhe der thermisch durchmischten Schicht in m

Literatur

- [All06] Allen, M. J.: „Updraft Model for Development of Autonomous Soaring Uninhabited Air Vehicles“, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, 2006
- [Blu14] Blum, H.: „Meteorologie für Segelflieger“, Motorbuch Verlag, Stuttgart, 2014
- [Blu17] Blum, H.: „Modell V(orh)ersagen“, segelfliegen 1/2017, Gabler Media, Bilten GL, 2017
- [Haf99] Hafner, T.: „Handbuch der Flugwettervorhersagen für den Luftsport“, Vorabdruck zu den 26. Segelflugweltmeisterschaften 1999 in Bayreuth
- [Hak16] Hakenesch, P. R.: „Skript zur Vorlesung Fluidmechanik, Version 2.1“, Hochschule München, 2016
- [Int01] Internet: <https://de.wikipedia.org/wiki/Taupunkt>