Das unerbittliche Tauschparadoxon[1]

Ruma Falk, Jerusalem

[1]aus: *Teaching Statistics* 30 (2008), 3, S. 86–88
Übersetzung: Elke Warmuth, Berlin

Zusammenfassung*: Ein schwer fassbares Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird analysiert. Der Trugschluss wird zurückgeführt auf die nicht adäquate Benutzung eines Symbols, das gleichzeitig eine Zufallsgröße und zwei verschiedene Werte, die diese annehmen kann, bezeichnet.*

1 Einleitung

Dieses Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eines der am häufigsten diskutierten Probleme der vergangenen Jahre. Es ist noch nicht Allgemeingut geworden, und viele finden es nach wie vor beunruhigend ungeachtet der vielen Einsichten, die in Studien erzielt wurden, die das Problem aus verschiedenen Blickwinkeln analysiert haben (siehe z. B. Blachman und Kilgour 2001; Brams und Kilgour 1995). Nickerson und Falk (2006) und die Online-Enzyklopädie Wikipedia geben verschiedene Analysen des Problems und enthalten viele zusätzliche Referenzen.

Das Anliegen dieses Aufsatzes ist es, eine einfache Formulierung der Auflösung des Paradoxons zu geben, die auf elementaren Wahrscheinlichkeitskonzepten beruht und Begriffe benutzt, die für Abiturienten und Studienanfänger zugänglich sind und die keine fortgeschrittenen technischen Fertigkeiten erfordern.

Die Darlegung orientiert sich an der in Wikipedia zuerst vorgeschlagenen Lösung und derjenigen anderer Autoren (Bruss 1996; Marinoff 1993; Rawling 1994). Ich versuche die Zweifel zu zerstreuen, die trotz der schlüssigen Argumente in den obigen Quellen manchmal noch aufkommen.

2 Das Problem

Es gibt viele Versionen dieses schwer fassbaren Problems, bei denen subtile Änderungen der Voraussetzungen oder Details des zugrundeliegenden Experiments verschiedene Lösungen hervorrufen. Diese scheinbar unwesentlichen Unterschiede wurden manchmal durch Leser übersehen und riefen fruchtlose Kontroversen hervor. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, beginne ich damit, aus der Wikipedia das „Problem der zwei Umschläge“ zu zitieren:

Wikipedia-Version: Angenommen, Sie haben zwei von außen nicht zu unterscheidende Umschläge, von denen jeder einen positiven Geldbetrag enthält. Ein Umschlag enthält doppelt so viel wie der andere. Sie dürfen einen Umschlag auswählen und das Geld behalten, das sich darin befindet. Sie wählen zufällig einen der beiden Umschläge, aber bevor sie ihn öffnen, bietet man Ihnen die Möglichkeit, stattdessen den anderen Umschlag zu wählen.

Angenommen, Sie argumentieren nun folgendermaßen:

1. Ich bezeichne mit A die Geldmenge im von mir ausgewählten Umschlag.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass A der kleinere Betrag ist, beträgt 1/2 und dass es der größere Betrag ist, beträgt ebenfalls 1/2.
3. Der andere Umschlag kann entweder $2A$ oder $A/2$ enthalten.
4. Wenn A der kleinere Betrag ist, dann enthält der andere Umschlag $2A$.
5. Wenn A der größere Betrag ist, dann enthält der andere Umschlag $A/2$.

6. Also enthält der andere Umschlag $2A$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 und $A/2$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2.
7. Also ist der Erwartungswert des Geldes in dem anderen Umschlag $1/2\ 2A + 1/2\ A/2 = 5/4\ A$.
8. Das ist mehr als A, also gewinne ich im Mittel durch Wechseln.
9. Nach dem Wechsel kann ich diesen Inhalt mit B bezeichnen und genauso wie vorher argumentieren.
10. Ich schlussfolgere, dass es am vernünftigsten ist, wieder zu wechseln.
11. Um vernünftig zu handeln, werde ich also unendlich oft zwischen den Umschlägen wechseln.
12. Da es aber noch vernünftiger scheint, irgendeinen Umschlag zu öffnen, anstatt unendlich oft zu wechseln, haben wir einen Widerspruch.

Das Problem besteht darin, den Fehler in der sehr verlockenden obigen Argumentation zu finden.

3 Fehlersuche

Die Aussage in 6. (basierend auf der Bezeichnung von 1.) kann umformuliert werden zu: „Was immer der Betrag in meinem Umschlag ist, der andere Umschlag enthält den doppelten Betrag mit Wahrscheinlichkeit 1/2 und den halben Betrag mit Wahrscheinlichkeit 1/2." Der Erwartungswert des Geldes im anderen Umschlag (Nr. 7) folgt aus dieser Aussage und führt zum Paradoxon. Der Fehler liegt in der Formulierung *was immer*, die äquivalent ist zu „für jedes A". Das ist falsch, weil der andere Umschlag nur dann doppelt so viel wie meiner enthält, wenn in meinem der kleinere Betrag ist; umgekehrt enthält er nur dann die Hälfte meines Betrages, wenn in meinem der größere Betrag ist. Also bezieht sich jeder der beiden Terme in der Formel in Punkt 7 auf einen anderen Wert, aber beide sind mit A bezeichnet. Mit Rawlings (1994, S. 100) Worten heißt das: „Man begeht die Kardinalsünde der Doppelbelegung einer algebraischen Variablen", wenn man so handelt.

Um genau bestimmen zu können, an welcher Stelle die Wikipedia-Version in eine absurde Schlussfolgerung mündet, müssen wir jeden Schritt kritisch analysieren. Schritt 1 ist einwandfrei, solange klar ist, dass A eine *Zufallsgröße* darstellt. Der Keim der Schwierigkeiten scheint in Schritt 2 zu liegen, wo zwischen zwei Werten, die die Variable A annehmen kann, unterschieden wird, diese aber mit demselben Symbol bezeichnet werden. Wir bemerken, dass, obwohl Schritt 2 richtig zu sein scheint, das Symbol A (die Zufallsgröße aus Schritt 1) nun für zwei verschiedene Werte steht: den kleineren und den größeren. Wäre Schritt 2 korrigiert worden zu: „Die Wahrscheinlichkeit, dass A der kleinere Wert ist, bezeichnet mit A_S, beträgt 1/2, und die Wahrscheinlichkeit, dass A der größere Wert ist, bezeichnet mit A_L, beträgt ebenfalls 1/2", dann wäre das Symbol A nicht für die beiden Fälle in den Schritten 6 und 7 verwendet worden und das Paradoxon wäre umgangen worden.

4 Modifizierte Argumentation

Indem wir Änderungen in den Schritten 2 bis 8 der Wikipedia-Version durchführen und einem parallelen Gedankengang folgen, kann die Argumentation so korrigiert werden, dass das Paradoxon verschwindet.

Modifizierte Wikipedia-Schritte:

1. Ich bezeichne mit A die Geldmenge im von mir ausgewählten Umschlag.

2'. Bezeichne mit S den kleineren der beiden Beträge. Die Wahrscheinlichkeit, dass $A = S$ ist, beträgt 1/2 und dass $A = 2S$ ist, beträgt ebenfalls 1/2.

3'. Der andere Umschlag kann entweder $2S$ oder S enthalten.

4'. Wenn $A = S$ ist, dann enthält der andere Umschlag $2S$.

5'. Wenn $A = 2S$ ist, dann enthält der andere Umschlag S.

6'. Also enthält der andere Umschlag $2S$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 und S mit Wahrscheinlichkeit 1/2.

7'. Also ist der Erwartungswert des Geldes in dem anderen Umschlag $1/2\ 2S + 1/2\ S = 3/2\ S$.

8'. Das ist gleich dem Erwartungswert von A, nämlich $1/2\ S + 1/2\ 2S = 3/2\ S$, sodass ich nichts durch Wechseln gewinne. Demzufolge ist es gleichgültig, ob ich wechsele oder nicht.

In der Wikipedia-Version ist die Addition der beiden Terme in der Formel von Schritt 7 zu $5/4\ A$ nicht zulässig, weil in den beiden Summanden verschiedene Werte der Variablen A auftauchen. Im Gegensatz dazu ist die Addition im modifizierten Schritt 7' zu $3/2\ S$ erlaubt, weil die beiden Summanden mithilfe von S ausgedrückt wurden und dieses S, was immer sein Wert auch ist, bedeutet in beiden Summanden dasselbe.

5 Eine alternative Version

In der folgenden Version wird das zugrunde liegende statistische Experiment explizit beschrieben. Es besteht kein Zweifel, dass in diesem Fall die optimale Strategie darin besteht zu wechseln (Falk und Konold 1992).

Die Münz-Version: Angenommen, Sie bekommen zuerst einen Umschlag mit einem positiven Geldbetrag A. Dann wirft jemand – für Sie unsichtbar – eine Münze, um zu entscheiden, ob der andere Umschlag $2A$ oder $A/2$ enthalten wird. Sie müssen nun entscheiden, ob Sie bei Ihrem Umschlag bleiben oder zu dem anderen Umschlag wechseln wollen.

Der Erwartungswert des Betrages im anderen Umschlag ist nun offenbar

$$E(A) = 1/2\ 2A + 1/2\ A/2 = 1{,}25A > A$$

und Sie werden im Mittel durch Wechseln gewinnen. Es gibt hier kein Paradoxon. Sei nämlich nach dem Wechseln Ihr Betrag B. Wenn Sie nun einen erneuten Wechsel erwägen, dann kann der Erwartungswert des Betrages im anderen Umschlag nicht berechnet werden, indem man A durch B in $E(A)$ ersetzt und $1{,}25\ B$ erhält. Nach dem ersten Wechsel ist der Betrag B in Ihrer Hand eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $1{,}25\ A$, während der Betrag im anderen Umschlag A ist. Sie tun also besser daran, nicht zu wechseln.

Es gibt etliche Unterschiede zwischen der Wikipedia-Version und der Münz-Version. In der Wikipedia-Version ist der Betrag A in Ihrem Umschlag eine Zufallsgröße und – falls Sie nicht wechseln – ist deren Erwartungswert $E(A) = 1{,}5\ A$ und dieser Erwartungswert unterscheidet sich von den Beträgen in den beiden Umschlägen und ist gleich dem Erwartungswert des Betrages im anderen Umschlag. In der Münz-Version ist A eine feste unbekannte Zahl und – falls Sie sich entscheiden, nicht zu wechseln – ist Ihr Gewinn A – der exakte Wert in Ihrem Umschlag. Außerdem ist der Betrag im anderen Umschlag in der Münz-Version tatsächlich $2A$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 und $A/2$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 und A ist derselbe Wert in beiden Fällen, sodass – falls Sie sich entscheiden zu wechseln – Ihr Erwartungswert $1{,}25\ A$ ist.

6 Verschmelzung der Versionen

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass in der Wikipedia-Version das Münzwurfszenario angewendet wurde, um zu beschreiben, wie die Beträge für die beiden Umschläge ermittelt wurden. Angenommen, ein positiver Betrag A wurde in den *ersten* Umschlag gelegt und eine Münze wurde geworfen, um zu entscheiden, ob der *zweite* Umschlag den Betrag $2A$ oder $A/2$ enthalten soll. Dann gilt – in Übereinstimmung mit der Wikipedia-Version – dass ein Umschlag doppelt so viel enthält wie der andere. Nun sind Sie aufgefordert, auf gut Glück einen Umschlag auszuwählen und dann zu entscheiden, ob Sie den vorgefundenen Betrag behalten oder stattdessen denjenigen aus dem anderen Umschlag nehmen wollen.

Die Auseinandersetzung mit dieser kombinierten Version kann helfen, einige Fallstricke zu umgehen. Die Argumentation verläuft wie folgt (vgl. Nickerson und Falk 2006, Versionen 4 und 8). Der Betrag im ersten Umschlag ist A und der Erwartungswert des Betrages im zweiten Umschlag ist $1{,}25\ A$. Der von mir ausgewählte Umschlag ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit der erste oder der zweite. Das Gleiche gilt für den anderen Umschlag. Folglich ist der Erwartungswert des Betrages in beiden Umschlägen jeweils

$$0{,}5(A + 1{,}25\ A) = 1{,}125\ A.$$

Es gibt also keinen Grund wechseln zu wollen, ebenso wie es keinen Grund gibt, den ausgewählten Umschlag behalten zu wollen.

Der Schlüssel zum Erfolg in der obigen Argumentation war die konstante Bedeutung von A als des Betrages im ersten Umschlag. Die Moral aus allem ist: Achte auf die Bezeichnungen! Verändere unterwegs nicht ihre Natur.

Danksagung

Ich danke Raymond Nickerson und Raphael Falk für die geduldigen Diskussionen und konstruktiven Kommentare und Lior Kogan für das Wiedererwecken meiner Zweifel.

Literatur

Blachmann, N. M.; Kilgour, D. M. (2001): Elusive optimality in the box problem. In: *Mathematics Magazine,* **74 (3)**, 171–181.

Brams, S. J.; Kilgour, D. M. (1995): The box Problem: to switch or not to switch. In: *Mathematics Magazine,* **68 (1)**, 27–34.

Bruss, F. T. (1996): The fallacy of the two envelopes problem. In: *Mathematical Scientist,* **21**, 112–119.

Falk, R.; Konold, C. (1992): The psychology of learning probability. In: F. Gordon; S. Gordon (eds): *Statistics for the Twenty-First Century.* Washington DC: Mathematical Association of America, 151–164.

Marinoff, L. (1993): Three pseudo-paradoxes in 'quantum' decision theory: apparent effects of observation on probability and utility. In: *Theory and Decision,* **35**, 55–76.

Nickerson, R. S.; Falk, R. (2006): The exchange paradox: probabilistic and cognitive analysis of a psychological conundrum. In: *Thinking & Reasoning,* **12 (2)**, 181–213.

Rawling, P. (1994): A note on the two envelopes problem. In: *Theory and Decision,* **36**, 97–102.

Wikipedia, the Free Encyclopedia On-Line: Two Envelopes Problem. *http://en.wikipedia.org/wiki/Two_envelopes_problem*

Anschrift der Verfasserin

Ruma Falk
The Hebrew University of Jerusalem, Israel
rfalk@cc.huji.ac.il